Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia

Vicente Sanjosé[1], Tomás Valenzuela[2], Mª Carmen Fortes[3] y Joan Josep Solaz-Portolés[4]

[1]Departamento de Didàctica de les Ciències Experimentals i Socials. ERI-Polibienestar. Universitat de València. E-mail: vicente.Sanjosé@uv.es
[2]Profesor Educación Secundaria. Generalitat Valenciana.
[3]Psicologia Evolutiva i de la Educació. Universitat de València.
[4]IES Benaguasil 46183. C.Tomás y Valiente de la UNED, València.

Resumen: La enseñanza de resolución de problemas en ciencias y matemáticas se realiza en general mediante estrategias de transferencia (transfer): se resuelve y explica un conjunto de problemas y después se pide a los estudiantes que resuelvan otros problemas análogos a los ejemplos trabajados. Los profesores de Secundaria con frecuencia asumen que las relaciones analógicas entre los problemas resueltos y los problemas propuestos son sencillas de comprender y establecer, y atribuyen el fracaso a la falta de dominio de los procedimientos matemáticos de resolución. En este trabajo se realiza un experimento para probar si esta atribución causal es adecuada o no. Los resultados demuestran que la causa principal de las dificultades debe tener su origen en la construcción de un modelo de la situación y/o de un modelo del problema, adecuados.

Palabras-clave: Resolución de problemas, dificultades de aprendizaje, transferencia, problemas algebraicos con enunciado, ecuaciones lineales.

Title: Algebraic difficulties in problem solving transfer of word problems

Abstract: Problem solving in sciences and mathematics is usually taught by transfer strategies: a set with a few problems is fully explained and then the students are expected to solve analogous problems. Secondary teachers frequently assume that building the analogical relationship among solved problems and the target ones are an easy cognitive task. So they claim that the cause of the low level of success in science problem solving is the lack of mathematical procedural competence. In this paper we perform an experiment to probe whether this claim is the main cause for the failure in science and mathematics problem solving or not. The results show the main cause will come from the failure in the construction of the appropriate situational-model and/or the problem-model representations.

Keywords: problem solving, learning difficulties, transfer, algebraic word problems, linear equations.

Introducción

Un problema típico en ciencias posee un enunciado escrito en lenguaje natural en el que ciertas entidades del mundo se encuentran en una situación que las relaciona según alguna regla, principio o ley subyacente.

Existen aspectos, atributos o características de esa situación que son conocidos y una demanda concreta sobre otro aspecto no conocido. Para ello hay que reconocer y usar esas reglas, principios y leyes pertinentes, pero también, típicamente, hay que saber utilizar algunas habilidades matemáticas.

La resolución de problemas es una de las tareas más creativas, exigentes e interesantes para la mente humana y es un área que ha atraído el interés de los científicos cognitivos desde siempre, en especial en ciencias y matemáticas (Polya, 1957; Newel y Simon, 1972, Larkin y Reif, 1979). Por ser uno de los objetivos de la educación, y una de las pruebas características del aprendizaje de alto nivel, la didáctica de las ciencias y la didáctica de las matemáticas también han centrado su interés en ello. Precisamente desde la didáctica de las ciencias se ha subrayando la diferencia entre un mero ejercicio y un problema (Gil y Martínez-Torregrosa, 1983; Gil y colaboradores, 2002): en el caso del ejercicio, el sujeto conoce desde el principio el modo en que debe ser resuelto; en el caso del problema, no. Jiménez-Aleixandre (1998; Reigosa y Jiménez-Aleixandre, 2000) diferencia los problemas 'auténticos', complejos, conectados con la vida real y destaca su utilidad para desarrollar la cultura científica en las aulas. En ciencias y matemáticas, intentar solucionar un ejercicio de mera aplicación o un problema que exige comprensión conceptual de la realidad, implica, activa y desarrolla diferentes tipos de conocimientos (Nakhleh, 1993; Solaz-Portolés y Sanjosé, 2006).

La comprensión de un problema parte de la comprensión de su enunciado, que no es sino un texto habitualmente corto, con unas pocas frases. Este texto corto demanda una gran cantidad de inferencias y la activación de conocimiento previo específico conceptual, situacional, procedimental, estratégico y esquemático (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2007a; Nathan, Kintsch y Young, 1992; Ferguson-Hessler y de Jong, 1990) para atender la demanda del problema. Las teorías y modelos de comprensión de textos han intentado abordar el campo de la resolución de problemas.

Una de las teorías más influyentes es la debida a Kintsch (1998; Kintsch y van Dijk, 1978; van Dijk y Kintsch, 1983). En ella se postulan 3 niveles de representación mental de un texto: a) el nivel léxico, o de reconocimiento de las palabras; b) la Base del Texto (BT) o nivel semántico constituido por los significados de las oraciones independientemente de la forma en que están escritas y de las palabras usadas; c) el Modelo de la Situación (MS) o nivel referencial en el que la información semántica del texto se relaciona con el conocimiento previo y se puede aplicar a nuevas situaciones. Kintsch y Greeno (1985) aplicaron esta teoría a los problemas aritméticos con enunciado, postulando la existencia de un nivel de representación, específico de los problemas, que ellos llamaron Modelo del Problema (MP): más allá de la representación de los objetos y eventos del mundo observable, los problemas matemáticos y científicos requieren también de abstracciones en términos de magnitudes, números, operaciones, ecuaciones, etc. El conocimiento que un resolutor debe poseer se amplía para incluir la capacidad de representar relaciones de un modo abstracto y la capacidad de realizar las operaciones matemáticas necesarias para llegar a la solución pedida. La teoría de Modelos Mentales de Johnson-Laird (1983) también se ha aplicado a la resolución de problemas con diferentes propósitos (Anderson, 1995; Mayer, 1992; Coleoni y col., 2001; Otero y col., 1998. Greca y Moreira, 1996 y 1998). La relación entre estas dos importantes teorías no está establecida de un modo riguroso, pero ambas manejan constructos cognitivos de naturaleza similar. El Modelo de la Situación construido en un problema está contenido en el conjunto de Modelos Mentales necesarios para representar el problema, pero en el caso de problemas con base matemática, los Modelos Mentales deben incluir también las abstracciones teóricas basadas en teoremas, leyes y principios científicos y, por tanto, contienen el Modelo del Problema.

Con todo ello, consideramos que un sujeto se enfrenta a un ‘problema’ (a diferencia de un ejercicio) cuando no dispone de las representaciones completas Modelo de la Situación y/o Modelo del Problema, necesarias para dar respuesta a las preguntas formuladas en la demanda del enunciado. Es decir, si el sujeto resolutor, tras la lectura del enunciado, activa representaciones almacenadas en su memoria suficientemente completas como para integrar simultáneamente los datos, la demanda y el procedimiento causal de unos a otra (es decir, para plantear, resolver y responder), entonces se trata de un ‘ejercicio’. Pero si para ello el sujeto requiere realizar inferencias para completar representaciones parciales activadas en su memoria, entonces se trata de un ‘problema’ (el sujeto no conoce cómo dar respuesta a las preguntas desde el principio).

En el proceso de resolución de un problema (con estructura matemática subyacente) con enunciado hay al menos 3 niveles (Hegarty y col., 1995) cada una de los cuales puede presentar obstáculos para los estudiantes:

a) Comprensión de la situación descrita en el enunciado con sus entidades, sus relaciones y sus atributos a un nivel concreto, no abstracto. Es decir, la persona resolutora debe construir las representaciones del texto del enunciado en términos del contenido léxico, semántico (BT) o referencial (MS). Ello incluye las reglas y las normas que rigen el funcionamiento del mundo que el sujeto conoce, y que sirven para que la situación descrita sea plausible una vez entendida (representada). El conocimiento general del mundo que el sujeto posee debe ser activado para subsumir la situación descrita en un esquema de funcionamiento conocido.

b) Traducción de esa situación del lenguaje natural al matemático y viceversa. El sujeto debe pasar de un modelo mental de la situación descrita en términos concretos (objetos y eventos; atributos y características espacio-temporales) a una representación abstracta Modelo del Problema que involucra magnitudes y fenómenos; cantidades y relaciones matemáticas; teoremas, leyes y axiomas. También en sentido contrario, a la hora de interpretar el resultado de un problema: las cantidades y abstracciones resultantes (MP) deben vincularse de nuevo con objetos y eventos del mundo (MS).

c) Manejo de las herramientas matemáticas necesarias para llegar al resultado, asociado con un conocimiento procedimental de los esquemas aritméticos, algebraicos, etc. de resolución.

Las dificultades que los estudiantes tienen para aprender a resolver problemas matemáticos con enunciado han sido asociadas con diferentes factores. Por ejemplo, se ha probado que la dificultad en la resolución de problemas de ciencias está relacionada con la cantidad de modelos mentales que deben ser construidos y procesados simultáneamente (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2007b). Pero muchas de las explicaciones aportadas proceden del análisis de la estructura semántica de los enunciados habituales usados para enseñar (Orrantia y col., 2005) y del modo en que dicha estructura semántica dificulta o facilita encontrar el conjunto de operaciones o el esquema matemático adecuado (Valentín y Chap-Sam, 2005; Carey, 1991; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Carpenter y Moser, 1984; Christou y Philippou, 1998; Nesher y Hershkovitz, 1994; Wilson, 1967). Kintsch y Greeno (1985) propusieron que la resolución de un problema requiere que los sujetos asocien las frases del enunciado (nivel BT) con esquemas preexistentes que sirven de vehículos para la construcción de representaciones matemáticas adecuadas (MP) y de guías para la acción resolutiva. Este proceso es el que origina la mayoría de los obstáculos para alcanzar éxito.

El procedimiento didáctico habitual para que los estudiantes adquieran esos esquemas, que proporcionan las bases de la comprensión y orientan el plan de acción, está basado en la transferencia analógica: se explicita la resolución de un conjunto de problemas en contextos determinados o temas (problemas ejemplo o 'fuente'), y después se pide a los estudiantes que apliquen lo aprendido a nuevos problemas (problemas 'diana'). El sujeto debe saber transferir esos métodos y estrategias desde los ejemplos a los problemas diana, usualmente no idénticos a los problemas ejemplo.

Normalmente, la transferencia analógica espontánea es poco frecuente cuando el problema fuente y el diana pertenecen a dominios de conocimiento diferentes y tienen una estructura superficial que no es semejante (Ross, 1987). Reed (1993) ha explicado la ausencia de esta transferencia fundamentándose en la falta de capacidad de los estudiantes para construir un esquema coherente en el correspondiente dominio de aprendizaje, que les impediría aplicar su conocimiento a nuevos dominios. No obstante, algunos estudios han mostrado que la transferencia interdominios puede ser facilitada mediante diseños instruccionales que fomenten la formación de reglas generalizadas o esquemas (Bassok y Holyoak, 1989; Lewis y Anderson, 1985). Se ha constatado también que la provisión de múltiples ejemplos sin instrucción explícita en reglas generalizadas (Catrambone y Holyoak, 1989), y las tareas de aprendizaje en las que los alumnos construyen sus propios problemas análogos (Bernardo, 2001) pueden facilitar la transferencia. Por otra parte Jonassen (2003) señala que para que exista transferencia de conocimiento es necesario que los estudiantes generen conexiones conceptuales internas entre los problemas y los dominios de conocimiento específico, y aprendan a elaborar diversas representaciones de los problemas.

En este trabajo centramos nuestra atención en el aprendizaje, por transferencia, de la resolución de problemas con enunciado que requieren plantear y resolver un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Esta clase de problemas es muy habitual en física y química, y también en otros contextos matemáticos y científicos. Nuestro interés en esta investigación se centra en esclarecer cuáles son las fuentes principales de dificultades para los estudiantes. Exploraremos el efecto de los diferentes vínculos posibles entre problemas fuente y diana, así como la magnitud de los obstáculos procedentes de los procedimientos matemáticos de resolución.

Fundamentos teóricos

La transferencia (o transfer) ha sido objeto de estudio por su utilidad desde los tiempos de Thorndike -su Teoría de los Componentes Idénticos es un antecedente de gran interés-, y ha sido concebido como un proceso de solución de problemas (Voss, 1987) por su componente esencial de búsqueda de información adecuada para conectar lo aprendido con lo demandado. Su complejidad cognitiva y las precauciones didáctica necesarias para su utilización en las aulas de ciencias ha sido recientemente revisada por Oliva (2004) que ha subrayado el carácter interno de las analogías, que la hace diferente de los estímulos externos dados por el profesor (Oliva y col., 2003), y la necesidad de aprender este proceso interno vía transferencia analógica, mediante la construcción de modelos apropiados, profundos, que van más allá de la asociación directa entre atributos de los contenidos fuente y diana. Se ha investigado también el transfer en la resolución de problemas, dedicando una atención especial a los problemas algebraicos con enunciado (Gick y Holyoak, 1980 y 1983; Reed, Dempster y Ettinger, 1985; Bassok y Holyoak, 1989; Reed, 1987).

La teoría de Gentner (1983) sobre el modo en que se construyen analogías en ciencias postula que entre el dominio fuente, base de conocimientos precedente, y el dominio diana deben evidenciarse semejanzas en las relaciones que existen entre los objetos y sus atributos, pero no semejanzas en los propios objetos y atributos. Las analogías en ciencias exigen una extrapolación estructural mucho más compleja que la mera asociación entre pares de elementos entre dominios y debe darse en diferentes niveles jerárquicos (Reed, 1987). En un problema con enunciado, los dos niveles de jerarquía más elevada son los asociados al mundo tangible (MS) y a las abstracciones teóricas y matemáticas (MP). Por tanto, el transfer analógico entre dos problemas puede darse a nivel del modelo de la situación y a nivel del modelo del problema. Asimismo se pueden transferir también los esquemas matemáticos de resolución, con independencia de las representaciones anteriores.

Se han estudiado algunas variables que pueden facilitar o dificultar la evidencia de semejanzas en las relaciones entre elementos de dos problemas a estos niveles. De acuerdo con algunos autores, (Chi, Feltovich y Glaser, 1981; Holyoak y Koh, 1987), los problemas con enunciado en ciencias y matemáticas pueden caracterizarse por dos factores característicos: 1) su contexto, historia o superficie; y 2) su estructura. El contexto alude a la temática concreta o ámbito del Mundo a la que pertenecen los objetos, propiedades, estados y eventos que se describen en el enunciado, pertenecientes al conocimiento general de las personas y, por ello, deben ser fácilmente reconocibles. La estructura se refiere a las relaciones entre variables en el espacio del problema dadas por reglas, normas, principios o leyes, y alude a representaciones abstractas propias del Modelo del Problema. En nuestro caso, la estructura hace referencia a las relaciones algebraicas que se dan entre las variables asociadas a las entidades expuestas en el enunciado. Desde el punto de vista matemático, si dos problemas tienen la misma estructura, las relaciones abstractas entre sus variables son idénticas y por tanto, ambos problemas se resuelven a través del mismo conjunto de algoritmos, operaciones etc. Estos dos factores sirven también para caracterizar y diferenciar los vínculos entre problemas en el transfer.

Si el problema fuente y el diana tienen ambos idéntico contexto y diferente estructura los llamaremos problemas similares; isomorfos si tienen diferente contexto pero idéntica estructura; equivalentes cuando tienen igual contexto e igual estructura, y, finalmente, no-relacionados, cuando tienen diferente contexto y diferente estructura (Reed, 1987). En la enseñanza y aprendizaje por transfer, es obvio que los problemas no-relacionados dificultan la extracción de los factores comunes importantes de ambos problemas y que los problemas equivalentes no favorecen los procesos de generalización necesarios. Son los elementos comunes, bien superficiales, bien estructurales, los que deben estar asociados con la percepción/construcción de los vínculos analógicos entre una situación planteada y otra ya conocida con anterioridad (Catrambone, 2002). Por tanto el trabajo con problemas similares debe favorecer los vínculos analógicos a nivel de MS, debido a los objetos y eventos comunes, pero no al nivel de MP, mientras que el trabajo con problemas isomorfos debe favorecer los vínculos analógicos a nivel del MP, aunque no a nivel de MS. En ciencias y matemáticas, el éxito en la resolución de problemas con enunciado se logra cuando los sujetos construyen los vínculos entre las estructuras de los problemas fuente y diana. Es decir, el éxito se alcanza cuando los sujetos aprenden a construir isomorfismos al nivel de las representaciones MP de ambos problemas y, además, conocen los modos matemáticos de proceder para llegar al resultado correcto.

De los tres niveles implicados en la resolución de un problema nos centraremos en este trabajo en el último, asociado con el conocimiento de procedimientos de cálculo y resolución. Saber calcular no implica saber resolver problemas (Nesher 1976), pero es evidente que no se puede tener éxito en la resolución si no se dominan también los procedimientos de cálculo y resolución, asociados con el álgebra en este caso. Entre los conocimientos que se exige saber transferir en las aulas se encuentran muchas habilidades matemáticas que es preciso saber utilizar en contextos científicos. En nuestro caso, esas habilidades se refieren al conocimiento acerca de los sistemas de ecuaciones lineales.

La pregunta que nos proponemos contestar es básica: las dificultades en el aprendizaje (por transferencia) de la resolución de problemas con enunciado, ¿proceden de deficiencias en el conocimiento procedimental básico asociado con los cálculos y las técnicas algebraicas o más bien proceden de construcción de modelos mentales deficientes que impiden llegar hasta el modelo del problema y plantear las ecuaciones adecuadas? Esta pregunta atiende a una de las quejas habituales entre los profesores de Secundaria cuando se trata de la transferencia de los aprendizajes matemáticos a los contextos de ciencias: ¿es el conocimiento inadecuado de los procedimientos de resolución de ecuaciones y de sistemas de 2 ecuaciones la causa principal del fracaso a la hora de aprender a resolver muchos de los problemas de ciencias y matemáticas? Si la respuesta es negativa, es que las dificultades están en los niveles MS y/o MP, tal como han encontrado los investigadores en otros niveles académicos y otras estructuras matemáticas (Valentín y Chap-Sam, 2005; Reed, 1987; Kintsch y Greeno, 1985), y entonces el transfer analógico entre problemas resueltos y problemas propuestos no es tan sencillo de establecer como piensan los profesores (Oliva, 2004). Las investigaciones precedentes orientan nuestra hipótesis:

Las fuentes de obstáculos para la correcta resolución de problemas en situaciones típicas de transfer se concentran en la construcción de los vínculos a nivel del modelo de la situación (vínculos entre objetos, sucesos y atributos) y/o en el proceso de traducción del lenguaje natural al lenguaje del álgebra (construcción del modelo del problema).

Por tanto, en una situación típica de transfer en la que se dispone de un problema fuente totalmente resuelto, los estudiantes de Secundaria no presentarán dificultades en el nivel del manejo algebraico sino en los niveles anteriores, que se visualizarán en errores a la hora de plantear las ecuaciones correctas. Sin embargo, una vez planteadas las ecuaciones, éstas serán resueltas correctamente. Los obstáculos esperados se darán cualquiera que sea la relación entre los problemas fuente y diana, debido a que el establecimiento de vínculos analógicos es un proceso no trivial, que requiere un trabajo específico bien diseñado, no incluido en este experimento.

Esta hipótesis se justifica a través de las observaciones tanto del diseño de los textos educativos como de la praxis: en las aulas de Secundaria, una gran parte de la enseñanza matemática se realiza con un elevado nivel de abstracción, en ausencia de ámbito conceptual. Las relaciones algebraicas resultan demasiado abstractas y difíciles de comprender por sí mismas en ausencia de contexto o historia. Los problemas con enunciados facilitan su comprensión y aprendizaje al conectar las entidades abstractas con el mundo concreto, lo que crea representaciones ricas de los problemas (Nathan, Kintsch y Young, 1992; Koedinger y Nathan, 2004).

En ausencia de un tratamiento adecuado con este tipo de problemas, se produce un aprendizaje de métodos de resolución mecánicos ante un sistema de ecuaciones explicitadas, pero supone un aprendizaje pobre de habilidades transferibles que influyen notablemente en la fase de planteamiento del problema, -que incluye la comprensión de la situación descrita y la traducción de un lenguaje ordinario a un modelo matemático-, y que supone la parte creativa de la resolución de los problemas algebraicos.

Método

Muestra

Los sujetos intervinientes en este experimento pertenecían a diferentes niveles de estudios secundarios (3º ESO y 1º y 3er cursos de formación profesional) de modo que la hipótesis general pudiera ser contrastada de un modo amplio, con el único requisito de que los conocimientos concretos intervinientes hubieran sido ya estudiados anteriormente. Los estudiantes, entre los 15 y los 18 años, pertenecen a dos centros educativos diferentes, ambos situados en localidades grandes (entre 15.000 y 25.000 habitantes) que centralizan los estudiantes de secundaria en sus respectivas comarcas. En todos los casos el nivel socioeconómico típico es medio. Participaron en el estudio un total de 104 sujetos de los cuales sólo 83 casos fueron adecuados para el análisis. El resto se descartaron por defectos en el procedimiento. La distribución por niveles de la muestra es la siguiente: 34 sujetos de 3º ESO, 30 sujetos de 1er curso de módulos de formación profesional, 19 estudiantes de 3er curso de módulos de formación profesional.

Estos sujetos no poseen a priori ninguna característica especial que haga pensar en diferencias sustanciales con el resto de la población de nivel secundario, pero no hubo muestreo aleatorio ni se procuró la representatividad por niveles educativos ni por edades; se trató de una muestra de conveniencia según su disponibilidad, de modo que los resultados obtenidos no pueden ser extrapolados a toda la población estudiantil de secundaria (no hay garantías de validez externa). Sin embargo, las condiciones del experimento sí permiten asegurar una adecuada validez interna, como se mostrará a continuación.

Se respetaron los grupos naturales en los dos centros de procedencia pero los sujetos se distribuyeron al azar en las condiciones experimentales de modo que éstas estuvieran equilibradas en cada grupo.

Diseño, variables y materiales

El experimento se diseñó para que los sujetos tuvieran que relacionar un problema fuente, totalmente resuelto, con un problema diana a resolver que será el evaluado. Dado que la comprensión de leyes y principios científicos interacciona con el resto de aspectos en un problema, en este acercamiento inicial simplificaremos la situación experimental utilizando problemas que no requieran de ellos, sino meramente del conocimiento ordinario de las reglas y normas de funcionamiento de conocimiento común. Ante este tipo de problemas los sujetos construyen representaciones más ricas que ante los problemas de contextos científicos (Buteler et al., 2001) con lo que se optimizan las condiciones de contraste de la hipótesis. En este experimento diferenciamos únicamente entre el nivel algebraico, en el que el sujeto resolutor debe utilizar esquemas matemáticos de manejo y resolución de las ecuaciones, y el resto (comprensión de la situación del enunciado y traducción de la misma a ecuaciones e interpretación del resultado). Por eso una parte de la muestra se encontrará en situación experimental en la que se eliminen los obstáculos en la construcción de los modelos de la situación y del problema, de modo que los obstáculos y errores detectados en el problema diana procedan sólo del nivel algebraico. El rendimiento de estos sujetos se comparará con el del resto de la muestra para los que la construcción de MS y MP no esté facilitada y pueda ser fuente de obstáculos junto con el nivel algebraico. En este segundo grupo de la muestra, estudiaremos también si la similitud entre problemas fuente y diana (problemas similares, isomorfos y no-relacionados) afecta el éxito en el transfer a estos niveles MS y MP.

La resolución de los problemas utilizados en este experimento requiere plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones lineales para contestar dos preguntas, C1 y C2 (Anexo). Los contextos considerados son:

'mercantil' (M) o de cuentas bancarias, e 'hídrico' (H) o de depósitos de agua. Las estructuras consideradas son: dos rectas que se cortan con pendientes del mismo signo y dos rectas que se cortan con pendientes de diferente signo. Nos referimos a estas estructuras como "alcanzar" (A) y estructura "encontrar" (E) respectivamente, en recuerdo de los clásicos problemas de dos móviles en Cinemática. Por último, para atender el propósito básico de este experimento, incluimos en el diseño la explicitación o no del sistema de ecuaciones necesario para dar respuesta a la demanda del problema. Hablaremos de modelo matemático 'explícito' (S) cuando el enunciado incluya dichas ecuaciones, e 'implícito' (N) cuando dichas ecuaciones no estén en el enunciado y sea el sujeto quien deba inferirlas (situación habitual en resolución de problemas algebraicos). La combinación de estas 3 variables da lugar a los ocho problemas utilizados en el experimento para los problemas fuente y diana (Tabla 1).

		ESTRUCTURA			
		ALCANZAR		ENCONTRAR	
CXTO	MERCANTIL	AMS	AMN	EMS	EMN
	HÍDRICO	AHS	AHN	EHS	EHN
		EXPLÍCITO	IMPLÍCITO	EXPLÍCITO	IMPLÍCITO
		MODELO MATEMÁTICO			

Tabla 1.-Problemas clasificados según las variables Contexto y Estructura. A/E = estructura "alcanzar/ encontrar"; M/H= contextos "mercantil/hídrico"; N/S = modelo matemático "explícito/implícito".

Las relaciones entre los problemas fuente y diana dependen de que tengan igual o distinto contexto, igual o distinta estructura, modelos matemáticos explícitos o implícitos. El caso en el que ambos problemas tienen el mismo contexto e igual estructura se corresponde a problemas idénticos y carece de interés. Por tanto, dado un problema fuente concreto, el problema diana debe tener diferente contexto, diferente estructura, o diferente contexto y diferente estructura a la vez. A ello hay que añadir el Modelo Matemático, explícito o implícito, en ambos problemas. Por tanto, para cada problema fuente hay 6 problemas diana posibles. Como existen ocho problemas fuente distintos, hay un total de 48 combinaciones distribuidas en doce casillas diferentes, como muestra la tabla 2.

Todas las combinaciones fueron usadas en la experiencia para contrabalancear. Los sujetos se asignaron al azar a una de las doce casillas y les fue asignada una de las 48 combinaciones de problema fuente y diana posibles. (Naturalmente, el hecho de que el problema fuente tenga el modelo matemático explícito o implícito no es relevante, habida cuenta de que este problema se presenta totalmente planteado, resuelto y explicado. Pero se han mantenido las doce casillas por completitud y simetría para clarificar el proceso de contrabalanceo.)

Las variables dependientes definidas para evaluar el planteamiento y resolución de los problemas diana por parte de los sujetos se clasificaron en tres grupos:

1) ‘Planteamiento’, con dos niveles: correcto/incorrecto. También el ‘Error en el Planteamiento’: consideramos errores en la pendiente de las rectas, en la ordenada en el origen o en ambos parámetros.

2) ‘Resolución’ de las ecuaciones, con dos niveles: correcta/incorrecta. Del mismo modo se atiende al tipo de ‘Error en la Resolución’ que pueden cometerse, bien de tipo algebraico, bien en los cálculos aritméticos.

3) ‘Resultado’: contestación que dan los sujetos a las dos cuestiones planteadas en el enunciado problema diana (C1 y C2). Esta variable controla la interpretación del resultado y los posibles errores en la expresión de las unidades.

		MODELO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA DIANA			
		S – S	N – N	S – N	N – S
ESTRUCTURA – CONTEXTO	IGUAL ESTRUCTURA-DISTINTO CONTEXTO	AHS – AMS AMS – AHS EHS – EMS EMS – EHS	AHN – AMN AMN – AHN EHN – EMN EMN – EHN	AHS – AMN AMS – AHN EHS – EMN EMS – EHN	AHN – AMS AMN – AHS EHN – EMS EMN – EHS
	DISTINTA ESTRUCTURA-IGUAL CONTEXTO	AHS – EHS AMS – EMS EHS – AHS EMS – AMS	AHN – EHN AMN – EMN EHN – AHN EMN – AMN	AHS – EHN AMS – EMN EHS – AHN EMS – AMN	AHN – EHS AMN – EMS EHN – AHS EMN – AMS
	DISTINTA ESTRUCTURA-DISTINTO CONTEXTO	AHS – EMS AMS – EHS EHS – AMS EMS – AHS	AHN – EMN AMN – EHN EHN – AMN EMN – AHN	AHS – EMN AMS – EHN EHS – AMN EMS – AHN	AHN – EMS AMN – EHS EHN – AMS EMN – AHS
		Fuen – DIAN	Fuen – Dian	Fuen – Dian	Fuen – Dian

Tabla 2.- Combinaciones posibles entre el problema resuelto (fuente) y el problema diana. A/E = “alcanzar/ encontrar”; M/H = “mercantil/ hídrico”; S/N = “explícito/ implícito”.

Con el fin de igualar las condiciones de activación de los conocimientos necesarios para realizar el transfer, se elaboró un material didáctico acerca del tema de funciones lineales (cuadernillo 1) y se explicó a todos los sujetos. Su longitud fue de cinco páginas y en él se incluyeron los siguientes contenidos teóricos fundamentales: qué es una función lineal, cómo se representa gráficamente, significado de la pendiente y de la ordenada en el origen, posibles formas de escribir una función lineal; diferentes notaciones posibles para una función lineal, algunos ejemplos de funciones lineales y funciones no lineales, resolución (algebraica y gráfica) de problemas con enunciado con ecuaciones lineales en diferentes casos, (1 recta, 2 rectas que se cortan, signos iguales y diferentes para las pendientes de ambas, etc.). Las características de algunos de estos problemas resueltos fueron similares a las de los problemas implicados en el experimento de transfer, de modo que servían como primer modelo (fuentes) para su posterior utilización en otros contextos.

Se confeccionó un segundo cuadernillo que contenía únicamente tres problemas., dos de ellos resueltos con detalle (problema fuente y problema distractor, en este orden). El tercer problema era el que tendrían que resolver los sujetos (problema diana), transfiriendo lo aprendido en uno de los dos problemas anteriores que debían identificar y diferenciar del distractor. La estructura del problema distractor no era ni "alcanzar" ni "encontrar", aunque el problema aludía a ecuaciones lineales: se trataba de determinar el valor de la pendiente y la ordenada en el origen de una misma recta a partir del conocimiento de los valores de dos de sus puntos.

De acuerdo con la hipótesis planteada, lo que esperamos con este diseño es encontrar: 1) Dificultades en la fase de planteamiento del problema diana para los sujetos en las condiciones experimentales de modelo matemático implícito. Esto debería visualizarse en una proporción relativamente alta de sujetos con errores en las ecuaciones (ordenadas en el origen, pendientes con sus signos). En este grupo de sujetos no esperamos diferencias significativas asociadas con las variables contexto y estructura, que regulan los vínculos entre problemas fuente y diana; 2) Ausencia de dificultades en la fase de resolución del sistema de ecuaciones una vez planteado, con independencia de que éste sea correcto o no. La proporción de sujetos en la condición modelo matemático implícito que alcancen éxito en las variables de resolución debe ser alto y comparable con la proporción de sujetos en la condición modelo matemático explícito.

Procedimiento

El experimento se realizó en dos sesiones. La primera sesión duró 50 minutos y consistió en el estudio de las bases matemáticas implicadas en los problemas del experimento (cuadernillo 1) de modo que sirviera de activación del conocimiento de base necesario para la comprensión de los problemas del cuadernillo 2 y facilitar el transfer. La segunda sesión, también de 50 minutos, consistió en la tarea de transferencia, propiamente dicha. Se suministró a los sujetos el segundo cuadernillo con los 3 problemas (fuente, distractor y diana, en este orden) y se les instruyó para que estudiaran durante 20 minutos los problemas resueltos (fuente y distractor). Tras ello se pasó a la resolución del problema diana durante los siguientes 30 minutos. Los sujetos podían consultar cualquiera de los dos problemas resueltos en todo momento. En toda esta segunda sesión los sujetos dispusieron también del cuadernillo 1 para su consulta a discreción. Entre ambas sesiones medió un lapso de entre 3 y 7 días.

Criterios de corrección

Los cuatro grupos de variables se valoraron de forma categórica, según la tabla 3.

Los errores de planteamiento pueden visualizarse en los parámetros necesarios para escribir las dos ecuaciones: ordenada en el origen y/o pendiente en cualquiera de las dos. Un planteamiento correcto implica la ausencia total de errores (sistema de ecuaciones totalmente correcto). La resolución de este sistema implica el manejo correcto de los procedimientos algebraicos aprendidos al efecto y, además, la ausencia de errores aritméticos o de cálculo. El resultado correcto supone valores numéricos acertados, unidades correctas e interpretación adecuada para responder correctamente a las dos preguntas planteadas en el enunciado.

Los datos procedentes de los estudiantes fueron valorados y asignados a las anteriores categorías por dos investigadores independientemente. Las escasas discrepancias a la hora de asignar categorías fueron motivadas por errores en alguno de los investigadores y no por indeterminación de las categorías o los criterios definidos. Se resolvieron mediante discusión hasta el acuerdo entre los investigadores (León y Montero, 1997).

VARIABLES DEPENDIENTES	CATEGORÍAS	
PLANTEAMIENTO	0: AUSENTE; 1: CORRECTO; 2: INCORRECTO	
ERROR EN EL PLANTEAMIENTO	0: NO HAY ERROR; 1: ERROR EN PENDIENTE 2: ERROR EN ORDENADA EN EL ORIGEN 3: ERROR EN PENDIENTE Y EN ORDENADA EN EL ORIGEN	
RESOLUCIÓN	0: AUSENTE; 1: CORRECTA; 2: INCORRECTA	
ERROR EN LA RESOLUCIÓN	0: NO HAY ERROR; 1: ERROR DE CÁLCULO (aritmético) 2: ERROR ALGEBRAICO	
RESULTADO	0: AUSENTE 1: C1 y C2 CORRECTAS 2: INCORRECTO SOLO C1 3: INCORRECTO SOLO C2	4: ERROR EN UNIDADES 5: SIN UNIDADES 6: INCORRECTO C1 Y C2

Tabla 3.-Categorías para las variables dependientes (problema diana).

Resultados

Fase de planteamiento

De los 83 sujetos únicamente 4 no realizan el planteamiento (no escriben ecuaciones). De ellos, 2 sujetos estaban en la condición de modelo matemático explícito y fueron eliminados del análisis. La Tabla 4 muestra la distribución de frecuencias en el planteamiento según sea correcto, incorrecto o ausente, en función de las variables Estructura, Contexto y Modelo Matemático. En total, un 74,7% de todos los sujetos intervinientes realiza un planteamiento correcto del problema diana, llegando a escribir sin errores el sistema de 2 ecuaciones lineales. Pero este porcentaje global está repartido de modo muy diferente entre los sujetos para los cuales se facilita la construcción del MP y los sujetos para los que no se hace.

Estructura	Contexto	Modelo Matemático	Planteamiento correcto	Planteamiento incorrecto o ausente	Total
Igual	Distinto	Explícito	14	0	
		Implícito	7	8	29
Distinta	Igual	Explícito	13	0	
		Implícito	6	6	25
Distinta	Distinto	Explícito	14	0	
		Implícito	8	5	27
Totales MM Explícito			41	0	41
Totales MM Implícito			21	19	40
Totales			62	19	81

Tabla 4.- Frecuencias en el planteamiento correcto e incorrecto o ausente, en función de las variables de los problemas.

Respecto de la variable Modelo Matemático, el porcentaje de planteamiento correcto entre los sujetos en el caso “implícito” es muy diferente del 100% deseado (y propio de la condición modelo matemático explícito): 52,5%. Es evidente que en este caso existe asociación significativa entre tener modelo matemático explícito o implícito y mostrar un planteamiento correcto o incorrecto (Chi cuadrado = 26,1; g.l. = 1; $p < 0,001$).

Es decir, 1 sujeto de cada 2 de la muestra es incapaz de escribir correctamente el sistema de ecuaciones cuando el enunciado del problema no lo explicita. Ello evidencia la no trivialidad de los procesos de transfer en resolución de problemas con enunciado, incluso en el caso de que los problemas fuente y diana sean isomorfos (el sistema de ecuaciones es idéntico excepto en los valores de los parámetros de ambas rectas).

La tabla 5 permite calcular los porcentajes de planteamiento correcto dentro de cada condición para el factor modelo matemático. Los valores son muy similares para cada una de las 3 relaciones posibles Contexto-Estructura entre problema fuente y diana:

Vínculo entre problemas Estructura-Contexto (% sobre total columna)	**Mod Mat Explícito** (N=41)	**Mod Mat Implícito** (N=40)	**% sobre el Total** (N=81)
Igual-Distinto (isomorfos)	34,1	17,5	25,9
Distinta-Igual (similares)	31,7	15,0	23,5
Distinta-Distinto (no-relacionados)	34,1	20,0	27,1
Total	100	52,5	76,5

Tabla 5.- Porcentajes de Planteamiento Correcto según los vínculos entre problemas fuente y diana, en cada una de las condiciones de la variable Modelo Matemático.

No hay asociación significativa entre tipo de vínculo entre problema fuente y diana, isomorfos/similares/no-relacionados, y planteamiento correcto/incorrecto del problema diana (Chi cuadrado < 1). Aunque no era previsible a priori, tampoco existen efectos de interacción entre estas últimas y la variable modelo matemático: una vez el modelo matemático está fijado (sea éste explícito o implícito), es indiferente cual sea la relación concreta Estructura-Contexto entre los problemas fuente y diana.

Los errores cometidos en el planteamiento, una vez realizado, son escasos: 8 sujetos cometen errores asociados a la pendiente de alguna de las rectas, mientras 9 sujetos escriben mal tanto la pendiente como la ordenada en el origen de alguna o ambas rectas. Ningún sujeto se equivoca solamente en la ordenada en el origen.

Fase de resolución

De los sujetos que disponen del modelo matemático explícito, un 85,4% realiza una resolución correcta usando apropiadamente algún método algorítmico para encontrar el punto común de las dos rectas que se cruzan. Si se valora esta variable con independencia del hecho de que las ecuaciones planteadas sean o no las correctas, podemos también valorar este conocimiento procedimental entre los sujetos en condición de modelo matemático implícito. Una vez planteadas las dos ecuaciones, sean éstas correctas o no, un 89,5% de estos sujetos las resuelve correctamente. No hay diferencias significativas entre ambos grupos de sujetos (Chi cuadrado < 1) y en ambos casos los porcentajes son altos, alcanzando globalmente un 87% sobre el total de 79 sujetos que escribió algún par de ecuaciones. La Tabla 6 recoge las frecuencias según los factores considerados.

Tampoco existen influencias significativas entre los diferentes vínculos entre los problemas fuente y diana, pero las diferencias en Estructura mejoran el éxito en la resolución, 92,3%, respecto al caso de estructuras iguales, 77,8%, (Chi cuadrado = 3,21; g.l.=1; 0,5 < p < 0,1), en sentido opuesto a lo que se podría esperar.

Estructura	Contexto	Modelo Matemático	Resolución		
			Correcta	incorrecta o ausente	Total
Igual	Distinto	Explícito	10	4	
		Implícito	11	2	27
Distinta	Igual	Explícito	12	1	
		Implícito	10	2	25
Distinta	Distinto	Explícito	13	1	
		Implícito	13	0	27
Total MM Explícito			35	6	41
Total MM Implícito			34	4	38
Totales			69	10	79

Tabla 6.- Frecuencias en la Resolución correcta e incorrecta o ausente, en función de las variables de los problemas.

Sólo 2 sujetos no resuelven y 8 cometen errores, siendo estos errores algebraicos (5 sujetos) y de operaciones (3 sujetos).

Fase de resultado

Esta variable alude a las respuestas dadas a las dos preguntas del enunciado del problema (ver Anexo), atendiendo tanto a las unidades asociadas al valor numérico como la interpretación que de ello se hace. En la tabla 6 se puede ver que el porcentaje de errores cometido es grande, 65,8%, asociado sobre todo a interpretaciones incorrectas de los valores numéricos con sus unidades. Sólo 5 sujetos cometen errores en las unidades mismas.

Estructura	Contexto	Modelo Matemático	Resultado		
			Totalmente correcto	Incorrecto	Total
Igual	Distinto	Explícito	4	10	
		Implícito	5	8	27
Distinta	Igual	Explícito	3	10	
		Implícito	6	6	25
Distinta	Distinto	Explícito	5	9	
		Implícito	4	9	27
Totales MM Explícito			12	29	41
Totales MM Implícito			15	23	38
Totales			27	52	79

Tabla 7.- Frecuencias en el Resultado correcto e incorrecto, en función de las variables de los problemas.

En el grupo con modelo matemático explícito un 29,3% logran escribir bien las unidades e interpretar correctamente el resultado, mientras en el grupo con modelo matemático implícito, el porcentaje es algo mayor, 39,5%. Las diferencias no son significativas (Chi cuadrado < 1). Los vínculos entre el problema fuente y el diana a nivel de estructura y contexto no producen diferencia ninguna.

Sin embargo no sucede lo mismo a la hora de estudiar la distribución de los errores cometidos en función del modelo matemático, al tratar de responder las dos preguntas formuladas en el enunciado C1 y C2 (Tabla 8):

Modelo Matemático	Error Unidades	Error sólo en C1	Error en C1 y C2	Total
Explícito	3	21	5	26
Implícito	5	3	15	18
Total	8	24	20	44

Tabla 8.- Distribución de los errores en la respuesta a las preguntas planteadas según el modelo matemático.

Y aparecen diferencias significativas en la distribución de los mismos según el modelo matemático del problema diana sea explícito o implícito (Chi cuadrado = 18,6; g.l.= 2; p< 0,001). El número de errores en unidades es más bajo del esperado por azar en ambas condiciones. Por otro lado, los sujetos en condición de modelo matemático explícito cometen más errores en la cuestión C1 o en ambas cuestiones (26) de lo esperado por azar (14,5). Los sujetos en condición de modelo matemático implícito cometen menos errores en C1 o en ambas cuestiones (18) de lo esperado por azar (13,5).

Las variables de contexto y estructura tampoco producen diferencias significativas en esta fase.

La figura 1 recopila los porcentajes de éxito en cada una de las fases de la resolución del problema diana en función del factor que ha demostrado significación: el modelo matemático explícito o implícito. En ella se aprecian las dificultades que tienen los sujetos en la fase de representación abstracta del enunciado (o en fase anterior) cuando las ecuaciones no están explicitadas en él.

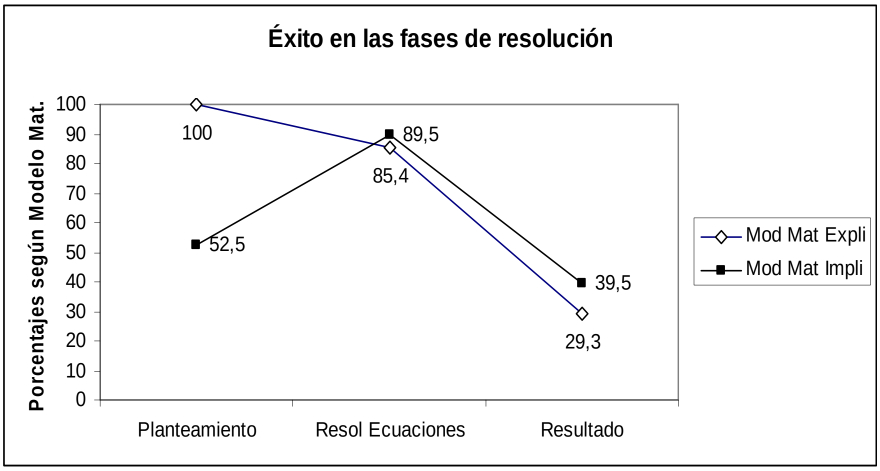

Figura 1.-Porcentajes de éxito en cada fase de la resolución del problema diana, según el factor Modelo Matemático.

También se visualiza la similitud alcanzada en los porcentajes de éxito en la resolución de las ecuaciones, que son muy altos en las dos condiciones representadas. En la interpretación del resultado para dar respuesta a las preguntas formuladas el nivel de éxito también similar en las dos condiciones, pero más bien bajo, probando de nuevo las dificultades que lo sujetos tienen para vincular las representaciones abstractas y las concretas.

Discusión e implicaciones didácticas

En el contexto de este experimento, sólo el 52,5% de los sujetos del grupo que no dispone de las ecuaciones explicitadas en el enunciado del problema diana logra plantear con éxito el problema escribiendo el sistema correcto de dos ecuaciones lineales. Esto implica que 1 de cada 2 de esos sujetos no logra construir un vínculo correcto entre los problemas diana y fuente. Es posible que el transfer en esta fase (planteamiento) falle debido a un error en la activación del conocimiento adecuado como base: pueden existir obstáculos en la comprensión del problema fuente y entonces resulta imposible construir la base de conocimientos necesaria para reconocer los vínculos con el problema diana, o bien, simplemente, el problema fuente se comprende bien pero no se pueden inferir los vínculos con problema diana (el problema fuente no se identifica como un análogo). El hecho de que los problemas fuente y diana sean similares, isomorfos o no-relacionados no produce diferencias significativas, ni tampoco se aprecian efectos de interacción con el modelo matemático. Esto apoya la idea de que el transfer analógico es un proceso no trivial que requiere de un trabajo específico en las aulas (Oliva, 2004).

Sin embargo, una vez se llega a la expresión del sistema de ecuaciones, sea éste correcto o no lo sea, los sujetos no tienen dificultades en resolver usando las estrategias matemáticas generales aprendidas (87,3% de éxito), sin que haya diferencias debidas a ninguna de las tres variables independientes consideradas. Aun con ello, existen diferencias con significación cercana al límite a favor de los sujetos en condición de estructuras diferentes (92,3%) sobre los que están en condición de estructuras iguales entre los problemas fuente y diana (77,8%). Esto parece sugerir que los estudiantes resuelven el sistema de ecuaciones sin apoyarse en el isomorfismo entre problemas fuente y diana, porque conocen bien los esquemas de resolución de sistemas de 2 ecuaciones lineales.

Ambos resultados están de acuerdo con nuestra hipótesis. La conclusión, en los límites de este experimento, es que las dificultades detectadas por los profesores a la hora de aprender a resolver problemas con enunciado no provienen de conocimiento inadecuado para el uso de las herramientas matemáticas involucradas. Por tanto, estas dificultades deben proceder de los procesos de construcción de las representaciones de los problemas: de la falta de comprensión profunda de la situación descrita en el enunciado (construcción del MS) o del proceso de traducción entre un lenguaje natural del enunciado y el lenguaje matemático (construcción del MP). La representación de un problema condiciona su codificación y almacenamiento en la memoria (su clasificación) en términos de elementos o rasgos superficiales y estructurales. La codificación determina la posibilidad de reconocer o establecer vínculos analógicos con otros problemas. Por tanto, el modo en que los sujetos construyen representaciones de los problemas es un asunto crucial en el transfer (Gentner, Loewenstein y Thompson, 2003).

Nuestros resultados están en consonancia con los obtenidos por Rebello y colaboradores (2007). Trabajando con problemas de física, estos investigadores encuentran que la principal dificultad de los estudiantes para resolverlos no proviene de la falta de base matemática, sino de la impericia para conectar los conocimientos matemáticos a los problemas de física. Es decir, las dificultades proceden bien de las representaciones MS y/o MP, bien de la conexión entre la representación MS y la representación MP. El mismo resultado se ha obtenido aquí trabajando con problemas en contextos familiares, no específicos de la ciencia, de modo que podemos sugerir la idea de que, probablemente, gran parte de los obstáculos en resolución de problemas de ciencias detectados en las aulas no son provocados por el desconocimiento de leyes, axiomas o modelos de la ciencia, sino por dificultades más profundas y, posiblemente, anteriores al estudio de las teorías científicas. Ello advierte de la fragilidad en la construcción de conocimientos complejos, como son los científicos, sobre bases psicológicas débiles o inadecuadas (capacidades y habilidades básicas insuficientes, objetivos instruccionales fundamentales no alcanzados). Cuando se trabaja en contextos disciplinares semánticamente ricos y específicos de alguna ciencia, cabe esperar que las leyes y sus expresiones, los modelos y sus aplicaciones, los principios y sus condiciones supongan fuentes de dificultad añadidas a (y en interacción con) las anteriores.

El análisis de la variable Resultado del problema diana, que atiende sobre todo a la interpretación que de los números y unidades hace el sujeto, apoya también estas conclusiones. Los estudiantes presentan un nivel alto de fracaso (57%) a la hora de interpretar los resultados matemáticos para responder las preguntas conceptuales que los problemas plantean, es decir, a la hora de volver a relacionar los conceptos abstractos con los acontecimientos y objetos del mundo tangible (traducción inversa: conexión entre MP y MS). Aun más, los sujetos para los que se había facilitado totalmente el planteamiento (condición de modelo matemático explícito) cometen más errores asociados con la traducción inversa (desde los resultados numéricos y unidades hasta su interpretación en términos de objetos, atributos y sucesos del mundo concreto) que los sujetos en condición de modelo matemático implícito. Esto podría ser debido al esfuerzo que los sujetos con modelo matemático implícito realizan para escribir las ecuaciones (construir el MP) comprendiendo y traduciendo el enunciado (MS) al lenguaje del álgebra. Esta relación entre MS y MP construida les facilita la traducción inversa. Los sujetos con modelo matemático explícito disponen de las ecuaciones correctas y las resuelven correctamente en un porcentaje grande, pero no necesitan construir representaciones adecuadas del modelo del problema que permitan comprenderlo, lo que produce una dificultad mayor para interpretar los resultados. Esto demuestra de nuevo que saber resolver es independiente de comprender.

Para facilitar la comprensión de los significados de las rutinas y procedimientos algebraicos Koedinger y Nathan (2004) sugieren que las clases de matemáticas deberían contemplar más problemas con enunciado.

Asimismo deberían dedicar más trabajo a establecer analogías estructurales entre diversas situaciones planteadas para generalizar las representaciones y codificaciones de los problemas. Si se desea que los procedimientos matemáticos aprendidos constituyan parte de esquemas resolutores en ciencias, las matemáticas deben ser algo más que rutina para ser lenguaje, lo que requiere un contenido semántico referido al mundo. De otro modo, el transfer entre los conocimientos matemáticos y los científicos es muy difícil, especialmente al intentar pasar de una representación concreta (Modelo de la Situación) a una abstracta (Modelo del Problema) o viceversa (interpretar los resultados).

Por tanto se requiere un esfuerzo específico dirigido a mejorar las representaciones de los problemas y su codificación en términos de factores estructurales propios de categorías lo más generales e inclusoras posible (factores usualmente contemplados en las matemáticas subyacentes). Algunos procedimientos instruccionales han arrojado resultados positivos. Por ejemplo, se ha probado que enseñar a reconocer y construir analogías produce un rendimiento superior a enseñar a usar las analogías, a la hora de facilitar el transfer de ciertas habilidades, (Harpaz-Itay y col., 2006). Asimismo, parece que se mejora la recuperación de análogos ya conocidos (‘fuentes’) y, con ello, el éxito en el transfer, cuando se trabaja en la construcción de análogos entre problemas diana en vez de trabajar sobre problemas fuente, porque se facilita la construcción de representaciones generalizadas de los problemas (y su codificación), en lugar de facilitar la construcción de esquemas de resolución aplicables a cierto rango de situaciones (Kurtz y Loewenstein, 2007).

En resumen, dentro de los límites de nuestra investigación, los sujetos demuestran saber resolver las ecuaciones pero manifiestan problemas graves de comprensión de los problemas algebraicos con enunciado. Si este resultado fuera general, el énfasis didáctico debería realizarse, bien en la comprensión de las interrelaciones existentes entre los elementos presentes en las situaciones descritas (comprensión de los roles que cada entidad juega; su relación con los demás elementos para determinar ligaduras y mutuas determinaciones) para facilitar la construcción del MS, bien en las técnicas de traducción entre dos lenguajes: el natural y el matemático (algebraico en nuestro caso) para facilitar la construcción del MP a partir del MS. Estas hipótesis están siendo actualmente contrastadas con el fin de articular un procedimiento didáctico facilitador del aprendizaje de la resolución de problemas con enunciado en ciencias y matemáticas.

Referencias bibliográficas

Anderson, J. (1995). *Learning and Memory: An Integrated Approach*. New York: Wiley.

Bassok, M. y K.J. Holyoak (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 15, 153-166.

Bernardo, A.B.I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 21(2), 137-150.

Buteler, L.; Gangoso, Z.; Brincones, I. y M. González (2001). La resolución de problemas en física y su representación: un estudio en la escuela media. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), 285-295.

Carey, D. A. (1991). Number sentences: Linking addition and subtraction word problems and symbols. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(4), 266-280.

Carpenter, T. P. y J.M. Moser (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grade one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(3), 179-202.

Carpenter, T. P., Hiebert, J. y J.M. Moser (1981). Problem structure and first grade children' s initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(1), 27-39.

Catambrone, R. (2002). The effects of surface and structural feature matches on the access of story analogs. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 28, 318-334.

Catrambone, R. y K.J. Holyoak (1989). Overcoming contextual limitations on problem-solving transfer. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 15(6), 1147-1156.

Chi, M.T.H., Feltovich, P.J. y R. Glaser (1981). Categorization and representation of physics problems by novices and experts. *Cognitive Science*, 5, 121-152.

Christou, C. y G. Philippou (1998). The developmental nature of ability to solve onestep word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(4), 436-443.

Coleoni, E.A.; Otero, J.C.; Gangoso, Z. y V. Hamity (2001). La construcción de la representación en la resolución de un problema de física. *Investigaçoes em Ensino de Ciências*, 6 (3).
En http:// www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm.

Ferguson-Hessler, M.G. y T. de Jong (1990). Studying Physics Texts: Differences in study processes between good and poor performers. *Cognition and Instruction*, 7, 41-54.

Gentner, D. (1983). Structure-mapping. A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, 155-170.

Gentner, D., Lewenstein, J. y L. Thompson (2003). Learning and transfer. A general role for analogical encoding. *Journal of Educational Phychology*, 95, 393-408.

Gick M.L. y K.J. Holyoak (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology*, 12, 306-355.

Gick M.L. y K.J. Holyoak (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, 1-38.

Gil, D. y J.Martínez-Torregrosa (1983). A model for problem-solving in accordance with scientific methodology. *European Journal of Science Education*, 5(4),447-455.

Gil, D., Carrascosa, J., Furió, C. y J. Martínez-Torregrosa (2002). *La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria*. (3ª Ed.). Barcelona: Horsori.

Greca, I.M. y M.A. Moreira (1996). Un estudio piloto sobre representaciones mentales, imágenes, proposiciones y modelos mentales respecto al concepto de campo electromagnético en alumnos de física general, estudiantes de posgrado y físicos profesionales. *Investigaçoes em Ensino de Ciências*, 1(1).
En http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm

Greca, I.M. y M.A. Moreira (1998). Modelos mentales y aprendizaje de física en electricidad y magnetismo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(2), 289-303.

Harpaz-Itay, Y., Kaniel, S. y E. Ben-Amram (2006). Analogy construction versus analogy solution, and their influence on transfer. *Learning and Instruction*, 16(6), 583-591.

Hegarty, M., Mayer, R.E. y C.A. Monk (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, 87 (1), 18-32.

Holyoak, K.J. y K.Koh (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition*, 15(4), 332-340.

Jiménez-Aleixandre, M.P. (1998). Diseño curricular: indagación y razonamiento en el lenguaje de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(2), 203-216.

Johnson-Laird, P.N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*. Cambridge, UK: Cambridge U.P.

Jonassen, D.H. (2003). Using cognitive tools to represent problems. *Journal of Research on Technology in Education*, 35(3), 362-381.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition*. Cambridge University Press, Cambridge UK.

Kintsch, W. y J.G. Greeno (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109-129.

Kintsch, W. y T.A. van Dijk (1978). Toward a model of discourse comprehension and production. *Psychological Review*, 85, 363-394.

Koedinger, K.R. y M.J. Nathan (2004). The Real Story Behind Story Problems: Effects of Representations on Quantitative Reasoning. *Journal of the Learning Sciences,* 13(2), 129-164.

Kurtz, K. y J. Loewenstein (2007). Converging on a new role for analogy in problem solving and retrival: When two problems are better than one. *Memory & Cognition*, 35(2), 334-341.

Larkin, J. y F. Reif (1979). Understanding and teaching problem solving in physics. *European Journal of Science Education*, 1(2), 191-203.

León, O.G. y I. Montero (1997). *Diseño de investigaciones*. Madrid: McGraw-Hill.

Lewis, M.W. y J.R. Anderson (1985). Discrimination of operator schemata in problem solving: Learning from examples. *Cognitive Psychology*, 17, 26-65

Mayer, R.E. (1992). *Thinking, problem solving and cognition*. New York: Freeman.

Nakhleh. M.B. (1993). Are our students conceptual thinkers or algorithmic problem solvers? *Journal of Chemical Education*, 70 (1), 52-55.

Nathan, M., Kintsch, W. y E. Young (1992). A Theory of Algebra-Word-Problem Comprehension and Its Implications for the Design of Learning Environments. *Cognition and Instruction*, 9(4), 329-389.

Nesher, P. (1976). The three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 369-388.

Nesher, P. y S. Hershkovitz (1994). The role of schemes in two-step problem: Analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics*, 26(1), 1-23.

Newel, A. y H.A. Simon (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Oliva, J.M. (2004). El pensamiento analógico desde la investigación educativa y desde la perspectiva del profesor de ciencias. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 3(3). Artículo 7.
En http://www.saum.uvigo.es/reec

Oliva, J.Mª; Aragón, Mª.M.; Bonat, M. y J. Mateo (2003). Un estudio sobre el papel de las analogías en la construcción del modelo cinético-molecular de la materia. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), 429-444.

Orrantia, J., González, L.B. y S. Vicente (2005). Analysing arthmetic Word problems in Primary Education textbooks. *Infancia y Aprendizaje*, 28(4), 429-451.

Otero, M.R.; Papini, C. e I. Elichiribehety (1998). Las representaciones mentales y la resolución de un problema: Un estudio exploratorio. *Investigaçoes em Ensino de Ciencias*, 3(1).
En http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm.

Polya, M. (1957). *How to solve it*. (2nd Ed.). New York: Doubleday

Rebello, N.S., Cui, L., Bennet, A.G., Zollman, D.A. y D.J. Ozimek (2007). *Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics*. En D. Jonassen (Ed.), Learning to solve complex scientific problems. Hillsdale, NJ: L.Earlbaum .

Reed, S.K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 13, 124-139.

Reed, S.K. (1993). *A schema-based theory of transfer*. In D.K. Detterman & R.J. Sternberg (Eds.), Transfer on trial: Intelligence, Cognition and Instruction, (pp 39-67). Norwood, NJ: Ablex.

Reed, S.K., Dempster, A. y M. Ettinger (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 11, 106-125.

Reigosa, C.E. y M.P.Jiménez-Aleixandre (2000). La cultura científica en la resolución de problemas en el laboratorio. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(2), 275-284.

Ross, B. (1987). This is like that: The use of earlier problems and the separation of similarity effects. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 13, 629-639.

Solaz-Portolés, J.J. y V. Sanjosé (2006). Problemas algorítmicos y conceptuales: Influencia de algunas variables instruccionales. *Educación Química*, 17(3), 372-378.

Solaz-Portolés, J.J. y V. Sanjosé (2007a). Cognitive variables in science problem solving. *Journal of Physics Teacher Education on Line*, 4(2), 25-32.

Solaz-Portolés, J.J. y V. Sanjosé (2007b). Resolución de problemas, modelos mentales e instrucción. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias,* 6(1). Artículo 5. En http://www.saum.uvigo.es/reec

Valentin, J.D. y L. Chap-Sam (2005). Roles of semantic structure of arithmetic word problems on pupils' ability to identify the correct operation. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning (electronic journal)*. En http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/valentin.pdf. May 4th.

Van Dijk, T. A. y W. Kintsch (1983). *Strategies of discourse comprehension*. Academic Press, New York.

Voss, J.F. (1987). Learning and transfer in subject-matter learning: a problem solving model. *International Journal of Educational Research*, 11, 607-622.

Wilson, J. W. (1967). The role of structure in verbal problem solving. *The Arithmetic Teacher*, 14, 486-497.

Anexo: Problemas utilizados

	Contexto Mercantil	Contexto Hídrico
	Estructura Alcanzar	
Texto común	Dos amigos, Zacarías y Aarón, deciden ahorrar y para ello abren dos cuentas bancarias cuyos saldos aumentan cada mes. Supondremos que la cantidad de dinero en cada cuenta es una función lineal del tiempo transcurrido, cuya recta tiene una pendiente que es el ritmo de crecimiento o decrecimiento del dinero a los que hay que añadir el signo que corresponda.	Dos propietarios de sendos chalés deciden llenar al mismo tiempo sus piscinas. Supondremos que el volumen de agua en una piscina es una función lineal del tiempo transcurrido cuya recta tiene una pendiente dada por el agua que entra (surtidor) o sale (desagüe) de cada piscina, a lo que hay que añadir el signo que corresponda.
Modelo Matemático Explícito	Las ecuaciones correspondientes son: $y= 100\ x + 4500$, para Zacarías; $y= 150\ x + 2000$, para Aarón; donde y es el dinero que hay en cada una de las cuentas corrientes, y donde x es el número de meses que han transcurrido. ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que ambos amigos tengan la misma cantidad de dinero en sus cuentas? ¿Cuánto dinero tendrá cada uno en ese momento? (AMS)	Las ecuaciones correspondientes son: $y= 60\ x + 1000$, para la primera piscina; $y= 40\ x + 5000$, para la segunda piscina; donde y es el volumen de agua en litros, y donde x es el tiempo transcurrido en minutos. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que ambas piscinas tienen la misma cantidad de agua? ¿Cuántos litros de agua hay en cada piscina en ese momento? (AHS)
Modelo Matemático Implícito	Inicialmente Zacarías pone en su cuenta 4500 euros y Aarón 2000 euros en la suya. Después Zacarías ahorra 100 euros cada mes y Aarón ahorra 150 euros cada mes. ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que ambos amigos tengan la misma cantidad de dinero en sus cuentas? ¿Cuánto dinero tendrá cada uno en ese momento? (AMN)	Inicialmente la primera piscina contiene 1000 litros de agua, y la segunda 5000 litros. El surtidor de la primero proporciona un caudal de 60 litros cada minuto, mientras que el de la segunda proporciona 40 litros cada minuto. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que ambas piscinas tienen la misma cantidad de agua? ¿Cuántos litros de agua hay en cada piscina en ese momento? (AHN)

<table>
<tr><th colspan="2">Contexto mercantil</th><th>Contexto hídrico</th></tr>
<tr><th colspan="3">Estructura Encontrar</th></tr>
<tr><td>Texto común</td><td>Dos cuentas bancarias varían al mismo tiempo su saldo. Mientras el dinero de la cuenta A crece con ingresos, el de la cuenta B decrece por los gastos. Supondremos que la cantidad de dinero en cada cuenta es una función lineal del tiempo transcurrido cuya recta tiene una pendiente que es el ritmo de crecimiento o decrecimiento del dinero, al que hay que añadir el signo que corresponda.</td><td>En dos piscinas cambia al mismo tiempo el volumen de agua. Mientras se llena una piscina gracias a un surtidor, la otra piscina se vacía por un desagüe. Supondremos que la cantidad de dinero en cada cuenta es una función lineal del tiempo transcurrido cuya recta tiene una pendiente que es el ritmo de crecimiento o decrecimiento del dinero, al que hay que añadir el signo que corresponda.</td></tr>
<tr><td>Modelo Matemático Explícito</td><td>Las ecuaciones lineales correspondientes son:
y= 5000 x + 100000, para la cuenta A;
y= -7000 x + 136000, para la cuenta B; donde y es el dinero que hay en cada una de las cuentas corrientes, y donde x es el número de años que han transcurrido. ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que ambas cuentas tengan la misma cantidad de dinero? ¿Cuánto dinero tendrá cada cuenta en ese momento? (EMS)</td><td>Las ecuaciones lineales correspondientes son:
y= 50 x + 25000, para la primera piscina;
y= -60 x + 80000, para la segunda piscina; donde y es el volumen de agua en litros, y donde x es el tiempo transcurrido en minutos. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que ambas piscinas tienen la misma cantidad de agua? ¿Cuántos litros de agua hay en cada piscina en ese momento? (EHS)</td></tr>
<tr><td>Modelo Matemático Implícito</td><td>Inicialmente la cuenta A tiene 100000 euros y la B tiene 136000 euros. El dinero varía al revés en ambas: mientras en la cuenta A el saldo crece a razón de 5000 euros al año, en la B decrece 7000 euros cada año. ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que ambas cuentas tengan la misma cantidad de dinero? ¿Cuánto dinero tendrá cada cuenta en ese momento? (EMN)</td><td>Inicialmente la primera piscina contiene 25000 litros de agua, y la segunda 80000 litros. La primera piscina se llena a razón de 50 litros cada minuto, mientras que la segunda piscina se vacía a razón de 60 litros cada minuto. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que ambas piscinas tienen la misma cantidad de agua? ¿Cuántos litros de agua hay en cada piscina en ese momento? (EHN)</td></tr>
</table>